


## REGRESSÃO POLINOMIAL E REDES NEURAIS ARTIFICIAIS NA AVALIAÇÃO DE IMÓVEIS: UM ESTUDO DE CASO

*Polynomial regression and artificial neural networks in evaluation real estate: a case study*

**Carlos Augusto Zilli**

<http://orcid.org/0000-0002-4926-1186> 

Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC),  
Florianópolis, Brasil  
carloszilli@gmail.com

**Luiz Fernando Palin Droubi**

<http://orcid.org/0000-0002-5971-7220> 

Secretaria Geral de Patrimônio da União (SPU),  
Florianópolis, Brasil  
lfpdroubi@gmail.com

**Norberto Hochheim**

<http://orcid.org/0000-0003-4670-4831> 

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC),  
Florianópolis, Brasil  
hochheim@gmail.com

### RESUMO

A NBR 14.653-2 prevê o uso de diferentes metodologias para avaliação de um imóvel. Dentre elas, destaca-se o uso de regressão linear e, alternativamente, o uso de redes neurais artificiais. A regressão linear é um método científico bastante difundido entre os engenheiros avaliadores, enquanto a utilização de redes neurais apresenta aplicação limitada, pois, apesar do seu desempenho extraordinário, ainda não está completamente explícito o que ocorre durante a aprendizagem de uma rede neural e porque elas funcionam. Uma alternativa aos modelos de redes neurais artificiais é a modelagem através de regressão polinomial, que nada mais é que um modelo de regressão linear em que são adicionados os termos quadráticos, cúbicos etc, assim como os termos de todas as possíveis interações entre as variáveis. Nesse estudo procura-se fazer um comparativo acerca da precisão obtida por modelos de regressão polinomial e por redes neurais artificiais em dados imobiliários. Essa precisão é aferida através do cálculo da raiz do erro médio quadrático - RMSE para as duas modelagens. Os resultados obtidos convergem para aqueles obtidos por Matloff *et al.* (2018) em seu artigo "*polynomial regression as an alternative to neural nets*", que pondera que as redes neurais artificiais, quando utilizadas funções de ativação lineares, são modelos de regressão polinomial em que o grau do polinômio aumenta a medida que aumenta o número de camadas ocultas da rede neural. Constatou-se, ainda, que o RMSE da regressão polinomial foi menor e com menor dispersão que o da respectiva rede neural artificial.

**Palavras-Chave:** Regressão polinomial; Redes neurais artificiais; Avaliação de imóveis.

### ABSTRACT

NBR 14.653-2 provides the use of different approaches to evaluate a property. Among them, the use of linear regression appears as an important one and, alternatively, the use of artificial neural networks. Linear regression is a widely used scientific approach among evaluation engineers, while the use of neural networks has limited application, because despite its extraordinary performance, it is not fully understood what happens during the learning of a neural network yet, and why they work. An alternative to artificial neural network models is polynomial regression modeling, which is nothing more than a linear regression model in which quadratic, cubic, and other terms are added, as well as the terms of all possible interactions between the variables. In this study we try to compare the precision obtained by polynomial regression models and by artificial neural networks in real estate data. This precision is measured by calculating the root-mean-square error - RMSE for the two models. The results obtained converge to those obtained by Matloff *et al.* (2018) in his article "*polynomial regression as an alternative to neural nets*", which argues that artificial neural networks, when using linear activation functions, are nothing more than polynomial regression models in which the degree of the polynomial increases the measure which increases the number of hidden layers of the neural network. It was also observed that the RMSE of the polynomial regression was smaller and with less dispersion than the respective artificial neural network.

**Keywords:** Polynomial regression; Neural networks; Real estate appraisal.

Preenchimento dos Editores

### INFORMAÇÕES SOBRE O ARTIGO

Submetido em 15/04/2022  
Publicado em 15/06/2022

Comitê Científico Interinstitucional  
Editor-Responsável: Carlos Augusto Zilli  
(SEER/OJS – Versão 3)



## 1. INTRODUÇÃO

Entre os métodos utilizados para a avaliação de imóveis previstos na NBR 14.653-2 (2011), o mais comum é o método comparativo direto de dados de mercado, utilizando técnicas de regressão que, além de apresentar uma ótima estimativa dos valores dos bens envolvidos, oferecem também qualidade e transparência ao processo avaliativo.

A metodologia científica, aplicando os conhecimentos de regressão polinomial, é bastante difundida e adotada por grande parte dos engenheiros avaliadores de imóveis, contudo, métodos alternativos podem ser adotados, desde que devidamente justificados do ponto de vista teórico e prático.

Entre esses métodos alternativos está o uso de redes neurais artificiais. Pelli Neto (2006) afirma que as redes neurais artificiais têm sido aplicadas na área de engenharia de avaliações, sendo aceita como metodologia científica pela ABNT. Essa metodologia é prevista pela NBR 14.653-2, que trata da avaliação de imóveis urbanos em seu anexo E.

Contudo, mesmo com a adoção de poderosas ferramentas matemáticas e de inteligência artificial, sabe-se que há ainda muitas dúvidas acerca dos procedimentos de aprendizagem de uma rede neural artificial, bem como inúmeras imprecisões inerentes ao próprio ato de avaliar.

Matloff *et al.* (2018), em seu artigo "*polynomial regression as an alternative to neural nets*", afirma que redes neurais são regressões polinomiais e que, para cada camada oculta de uma rede neural, há um modelo de regressão polinomial equivalente, fazendo com que o grau dessa regressão polinomial aumente à medida que aumenta o número de camadas ocultas da rede. Frente a isso, o presente artigo demonstra que resultados obtidos por regressão polinomial apresentaram precisão igual ou superior àqueles obtidos por redes neurais.

Ademais, busca-se nesse estudo comparar os resultados que se obtém ao se tratar 50 dados de oferta de imóveis utilizando modelos de regressão polinomial e redes neurais artificiais, com o objetivo de verificar se os resultados convergem para aqueles encontrados por Matloff *et al.* (2018).

## 2. ENGENHARIA DE AVALIAÇÕES

Dantas (2012) define engenharia de avaliações como uma especialidade da engenharia que reúne um conjunto amplo de conhecimentos na área de engenharia e arquitetura com o objetivo de determinar tecnicamente o valor de um bem, de seus direitos, frutos e custos de reprodução, fornecendo subsídios para a tomada de decisão sobre valores, custos e alternativas de investimentos de bens de qualquer natureza, móvel ou imóvel, além de seus frutos e direitos.

Nesse sentido, a avaliação de imóveis se apresenta como uma grande atividade da engenharia, com impacto direto na viabilização de milhares de negócios mundo afora. Os primeiros trabalhos de engenharia de avaliação que se tem conhecimento remontam ao início do século XX, com destaque ao engenheiro Berrini (DANTAS, 2012), um dos precursores dessa área no Brasil.

Considerando as atuais pesquisas sobre engenharia de avaliações, pode-se verificar que essa atividade se apresenta em um avançado estágio de evolução e um importante elemento dessa evolução é NBR 14.653 em suas partes 1 a 7, que possibilita com que procedimentos sejam realizados de forma padronizada e introduz os conceitos e exigências técnicas para a avaliação de bens em geral, realizada com fundamentação e precisão mínimas desejadas.

A NBR 14.653-2, em seus anexos de A até E, trás recomendações para a utilização de modelos de regressão linear, utilização de tratamento por fatores, tratamento de dados por regressão espacial, utilização de análise envoltória de dados e tratamento de dados por redes neurais artificiais.

### 2.1. REGRESSÃO POLINOMIAL

Em termos formais, a regressão diz respeito ao estudo da dependência de uma variável, a variável dependente, em relação a uma ou mais variáveis, as variáveis explanatórias, visando estimar e/ou prever o valor médio da primeira em termos dos valores conhecidos ou fiados (em amostragens repetidas) das segundas (GUJARATI *et al.*, 2011).

Os modelos de regressão são amplamente usados em diversas aplicações para descrever a relação entre a variável resposta  $y$  e uma ou mais variáveis explicativas  $x_1, \dots, x_m$ . É importante salientar, ainda, que o modelo de regressão é linear se a quantidade de interesse é função linear dos parâmetros envolvidos.

### 2.1.1. Modelos de Regressão Linear

O exemplo mais simples de regressão polinomial consiste em ajustar uma reta a um conjunto de pares de observação em que  $y$  é a variável dependente,  $x_1$  é a variável explanatória ou regressora, e o termo de erro  $e_i$ , o indicador da  $i$ -ésima observação. A expressão matemática da reta é dada pela equação (1):

$$y_i = f(x_1) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + e_i \quad (1)$$

Em que  $\beta_0$  é o coeficiente que representa o intercepto com o eixo dos  $y$ , e  $\beta_1$  representa inclinação que a reta forma com o eixo das abscissas. O  $e$  é o erro ou resíduo entre o valor ajustado pelo modelo e a observação.

Dizemos que o erro ou resíduo é a discrepância entre o valor verdadeiro e o valor aproximado de  $y$ , que pode ser expresso por (2):

$$e_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i}) \quad (2)$$

Nesse caso, o melhor ajuste será aquele que busca minimizar a soma dos quadrados dos resíduos entre o  $y$  medido e o  $y$  calculado com o modelo linear para todos os dados disponíveis na amostra, definida pela equação (03):

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{1i})^2 \quad (3)$$

Na engenharia de avaliações, o mais comum é a utilização de modelos de regressão linear múltipla. Nesse sentido, uma extensão bastante usada de regressão polinomial linear é o caso no qual  $y$  é uma função linear de duas ou mais variáveis independentes  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Nesse caso teremos (4):

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_m x_{mi} + e_i \quad (4)$$

Esse modelo é particularmente útil quando desejamos fazer o ajuste de dados experimentais em que a variável explicada é uma função de duas ou mais variáveis explicativas. Nesse caso, a reta de regressão torna-se um plano ou hiperplano, dependendo da quantidade de variáveis explicativas.

Os modelos (1) e (4) são obtidos pelo critério de mínimos quadrados em que se realiza a regressão linear simples e linear múltipla para se ajustar uma reta ou um plano de  $m$  dimensões aos  $n$  dados.

### 2.1.2. Modelos de Regressão Polinomial

Em problemas de engenharia de avaliações, embora algumas variáveis apresentem padrão semelhante ao de uma reta, existem outras que não seguem esse modelo. Nesses casos uma curva poderia ser adequada e, comumente, realiza-se a transformação dessa variável.

Entretanto, uma alternativa possível é ajustar polinômios aos dados da amostra utilizando regressão polinomial. A técnica dos mínimos quadrados pode ser prontamente estendida para se ajustar dados por um polinômio de grau maior. O modelo polinomial, com uma variável  $x_1$ , é dado

$$y_i = f(x_1) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{1i}^2 + \dots + \beta_m x_{1i}^m + e_i \quad (5)$$

Verifica-se que a equação (5) é polinomial  $\forall m \geq 2$  com  $m \in \mathbb{N}$  ou com  $\beta_2 \neq 0$ . Para esse modelo, o resíduo é dado pela reorganização da equação anterior conforme apresentado em (6)

$$e_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{1i}^2 + \dots + \beta_m x_{1i}^m) \quad (6)$$

Assim como no caso anterior, o melhor ajuste é aquele em que os valores dos coeficientes são determinados escrevendo-se a soma dos quadrados dos resíduos, conforme equação (7) mostrada abaixo:

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{1i} - \beta_2 x_{1i}^2 - \dots - \beta_m x_{1i}^m)^2 \quad (7)$$

Faz-se, então, a derivada parcial da equação (7) em relação a cada coeficiente desconhecidos do polinômio. As equações obtidas são, dessa forma, igualadas a 0 e organizadas para se determinar esses coeficientes.

Nesse caso, constata-se que o problema de se determinar um polinômio  $f(x_1)$ , de grau dois, pelo critério dos mínimos quadrados, é equivalente a resolver um sistema de três equações lineares simultâneas.

Para se determinar os coeficientes de um polinômio de uma variável com grau  $m$ , deve-se resolver um sistema de  $(m + 1)$  equações lineares.

Pode-se também utilizar regressão polinomial quando se tem mais de uma variável explicativa. Além dos termos quadrático, cúbicos, quárticos etc, podemos inserir interação entre as variáveis. Um exemplo possível, envolvendo apenas duas variáveis independentes, é mostrado a seguir:

$$y_i = f(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i}^2 + \beta_4 x_{2i}^2 + \beta_5 x_{1i} x_{2i} + e_i \quad (8)$$

Em engenharia de avaliações, a grande maioria dos trabalhos envolve regressões polinomiais com mais de uma variável explicativa. Em geral utiliza-se regressão linear múltipla, com técnicas já consagradas.

## 2.2. REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

McCulloch e Pitts propuseram, em 1943, um modelo de neurônio artificial, como uma unidade de processamento simples, cuja proposta não era copiar o neurônio verdadeiro, mas, sim, modelá-lo (BEALE *et al.*, 1990).

Nesse modelo, o neurônio possuía dados de entrada da rede ou de saídas de outros neurônios ( $x_1, x_2, \dots, x_m$ ), ponderados pelos pesos ( $w_1, w_2, \dots, w_p$ ) das ligações ou sinapses, sendo estes pesos fixos, não ajustáveis.

Segundo Ferneda (2006), combinando diversos neurônios, forma-se uma rede neural. As redes neurais são modelos que buscam simular o processamento de informação do cérebro. São compostas por unidades de processamentos simples, os neurônios, que se unem por meio de sinapses.

De lá para cá, houve muita evolução. As redes neurais artificiais (RNA's) continuam tendo o seu funcionamento inspirado na estrutura biológica do cérebro humano e podem ser entendidas como conjuntos bem estruturados de unidades de processamento, interligados por canais de comunicação, cada qual tendo um determinado peso correspondente a um valor numérico. No decorrer do processo de "aprendizagem", os referidos pesos vão se ajustando de forma a atingir o objetivo pretendido (BAPTISTELLA *et al.*, 2007).

Conforme Sobreiro *et al.* (2009), a sistematização das redes neurais artificiais é realizada conforme o padrão de conexão entre camada das redes, o número de neurônios em cada camada, da capacidade da aprendizagem e as funções de ativação, ou seja, uma rede neural é um conjunto de entrelaçamentos, no qual cada conexão apresenta um peso associado, a fim de ajustar os *inputs* (entradas) aos *outputs* (saídas).

### 2.2.1. Perceptrons de Múltiplas Camadas

Dentre todas as possíveis topologias, as redes neurais podem ser classificadas em não recorrentes (*feed-forward*) e recorrentes (*feed-back*). As redes neurais não recorrentes são as que não possuem realimentação de suas saídas nas entradas. Essas redes têm sua estrutura organizada em camadas, podendo ser constituídas por uma ou mais camadas (GUARNIERI, 2006).

As redes neurais multicamadas contêm um conjunto de neurônios de entrada, uma camada de saída e uma ou mais camadas intermediárias, chamadas de camadas ocultas. Em geral, a entrada não é considerada camada da rede, pois apenas recebe os dados e os distribui, não realizando ponderação, somatório ou comparação com limiares.

Em geral, as redes neurais não-recorrentes com mais de uma camada são denominadas *perceptrons* de múltiplas camadas (*multilayer perceptron*). A figura 01 traz um *perceptron* de múltiplas camadas

contendo três entradas, duas camadas intermediárias com 4 neurônios cada e uma camada de saída com um neurônio, produzindo uma informação de saída.

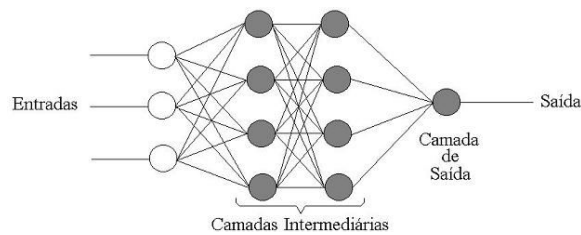


Figura 1 - Rede neural de duas camadas ocultas (Guarnieri, 2006).

Cada neurônio representado por um círculo pintado na rede neural da figura 1, pode ser visto como modelo para um neurônio genérico k da figura 2, apresentado de forma simplificada por Haykin (2001).

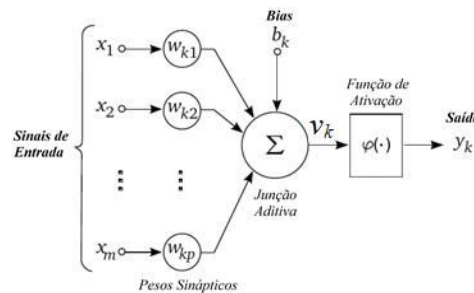


Figura 2 - Modelo não linear de um neurônio (Haykin, 2001).

O modelo proposto por Haykin (2001) é composto por três elementos básicos: A) um conjunto de m conexões de entrada ( $x_1, x_2, \dots, x_m$ ), caracterizadas por pesos ( $w_1, w_2, \dots, w_p$ ); B) um somador ( $\Sigma$ ) para acumular os sinais de entrada; C) uma função de ativação ( $\varphi$ ) que limita o intervalo permissível de amplitude do sinal de saída ( $y_k$ ) a um valor fixo, dependendo da função escolhida.

O chamado nível de atividade interna do neurônio ( $v_k$ ) é obtido pela combinação do somatório das entradas ponderadas com outro valor ajustável, denominado bias ( $b_k$ ). A saída do neurônio,  $y_k$ , é produzida pela aplicação do nível de atividade interna a uma função de ativação ( $\varphi$ ). O bias tem o efeito de aumentar ou diminuir a entrada líquida da função de ativação, dependendo se ele é positivo ou negativo, respectivamente (Haykin, 2001).

Um neurônio pode ser representado matematicamente pelas expressões:

$$v_k = \sum_{j=1}^n w_{kj} \cdot x_j + b_k \tag{9}$$

$$y_k = \varphi(v_k) \tag{10}$$

Tem-se que a equação (9) determina o valor de  $v_k$  que será levado para a função de ativação escolhida. Em razão da necessidade da utilização de sua derivada, é interessante que a função  $\varphi$  seja contínua e diferenciável. A função de ativação define a saída de um neurônio de acordo com o nível de atividade produzida pelas suas entradas. Funções comumente empregadas, segundo Braga et al. (2000) e Haykin (2001), são:

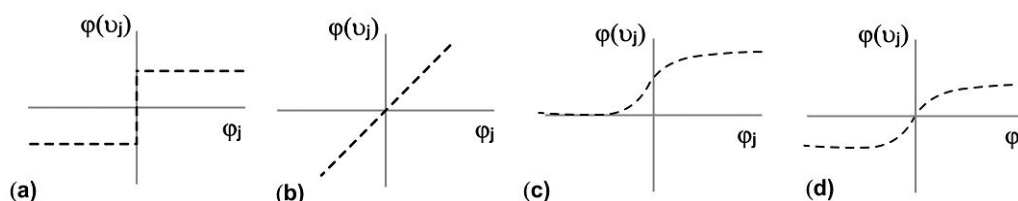


Figura 3 - Função (a) degrau, (b) linear, (c) logística, (d) tanh (Fiorin et al., 2011).

### 2.2.2. Arquitetura de uma Rede Neural

As redes neurais artificiais diferenciam-se pela sua arquitetura e pela forma como os pesos associados às conexões são ajustados durante o processo de aprendizado da rede. A arquitetura de uma rede neural restringe o tipo de problema no qual a rede poderá ser utilizada, e é definida pelo número de camadas (camada única ou múltiplas camadas), pelo número de nós em cada camada, pelo tipo de conexão entre os nós (*feed-forward* ou *feed-back*) e por sua topologia (HAYKIN, 2001, p. 46-49).

Segundo Haykin (2001), existem três tipos de arquitetura fundamentalmente diferentes: as redes de camada única alimentadas adiante, redes de múltiplas camadas alimentadas adiante (não recorrentes) e as redes recorrentes.

- 1) Redes alimentadas adiante ou não recorrentes (*feed-forward*) com camada única: a camada de entrada não é considerada, pois não é feito cálculo algum, logo a “camada única” refere-se à camada de saída.
- 2) Redes alimentadas adiante ou não recorrentes (*feed-forward*) com múltiplas camadas: a camada de entrada continua não sendo considerada, pois não é feito cálculo algum, portanto somente são contadas as camadas chamadas intermediárias e a camada de saída da rede neural.
- 3) Redes alimentadas adiante com laços de realimentação ou recorrente (*feed-back*): o que diferencia este tipo de rede dos outros tipos de rede é o fato de haver ao menos um laço de realimentação na rede neural.

### 2.2.3. Aprendizagem de uma Rede Neural

Conforme Braga *et al.* (2000), uma das propriedades mais importantes de uma rede neural é a capacidade de aprender por intermédio de exemplos e fazer inferências sobre o que aprendeu, melhorando gradativamente o seu desempenho. As redes neurais utilizam um algoritmo de aprendizagem cuja tarefa é ajustar os pesos de suas conexões.

No processo de aprendizagem, também chamado de treinamento da rede, um conjunto de exemplos é fornecido para a rede, que ajusta os seus pesos sinápticos até que ela retire as características principais que representam as informações inseridas na rede. Na sequência, esses pesos são fixados e usados para buscar novas soluções para novas entradas.

Ademais, os treinamentos podem ser classificados em supervisionados e não-supervisionados. No treinamento não-supervisionado é fornecido à rede somente valores de entrada que são organizados em diferentes classes de acordo com a semelhança de suas propriedades através do ajuste de seus pesos da rede (FIORIN *et al.*, 2011). No treinamento supervisionado, a cada iteração um vetor de entradas e um vetor alvo (saídas desejadas) são apresentados à rede. A partir das entradas, a rede calcula as saídas e compara-as com os alvos. Os pesos são ajustados de maneira que os valores das saídas aproximem-se dos alvos. (GUARNIERI, 2006).

Segundo Guarnieri (2006), considerando-se um neurônio de saída  $k$  em treinamento supervisionado sequencial, a cada iteração  $t$  é produzido um sinal de erro  $e_k(t)$ , obtido pela diferença entre o valor de saída calculado pelo neurônio e o valor alvo ou, saída desejada,  $d_k(t)$

$$e_k(t) = d_k(t) - y_k(t) \quad (11)$$

Em cada uma das etapas do treinamento da rede, são realizadas alterações nos pesos, provocando uma redução incremental dos erros, de modo que a solução vai convergindo para o valor esperado.

Para Haykin (2001), o encerramento da fase de treinamento ocorre quando o erro atingir um valor mínimo estabelecido ou quando a taxa de variação do erro atingir um valor definido como critério de parada.

Em algumas situações, mesmo que se tenha obtido um erro mínimo para a rede neural na fase de treinamento, quando aplicado a um novo grupo de dados, o erro eleva-se. Diz-se, então, que a rede neural não adquiriu capacidade de generalização e que ocorreu um problema no treinamento da rede, conhecido como *overfitting* ou excesso de treinamento.

O fenômeno de *overfitting* ocorre, geralmente, quando é empregado um número muito grande de neurônios ocultos na rede, fazendo com que se permita à rede ‘decorar’ os dados, ao invés de aprender os seus padrões. Com o objetivo de garantir a capacidade de generalizar, métodos foram criados, entre eles a regularização e o treinamento com parada antecipada.

### 3. METODOLOGIA

Nesse estudo foram utilizados os 50 (cinquenta) dados de mercado de imóveis encontrados em Hochheim (2015). Na Figura 04, pode-se ver o comportamento da variável dependente em função de cada um dos regressores. Na sequência, vemos a descrição das variáveis consideradas no modelo, encontradas descritas em Hochheim (2015, p. 23):

- **Valor:** Valor total do imóvel. Variável quantitativa contínua. Unidade monetária em reais (R\$).
- **Area\_Total:** Área total do imóvel. Variável quantitativa contínua. Unidade: metros quadrados (m<sup>2</sup>).
- **Quartos:** Número de quartos, incluindo suítes. Variável quantitativa discreta.
- **Suítes:** Número de suítes do apto. Variável quantitativa discreta.
- **Garagens:** Número de vagas de garagens do apartamento. Variável quantitativa discreta.
- **Dist\_Beira\_Mar:** Distância em metros ao polo Beira Mar Norte. Variável quantitativa contínua.
- **Padrao:** Padrão do imóvel. Variável qualitativa tipo código alocado. Representa os três padrões encontrados na amostra. Existem 8 dados de padrão baixo (código alocado = 1), 17 dados de padrão médio (código alocado = 2) e 25 dados de padrão alto (código alocado = 3). (HOCHHEIM, 2015).

Para as simulações foi utilizado o software estatístico R na sua versão 3.5.1. Nas figuras, pode-se acompanhar a representação gráfica da variável dependente versus cada variável independente do modelo.

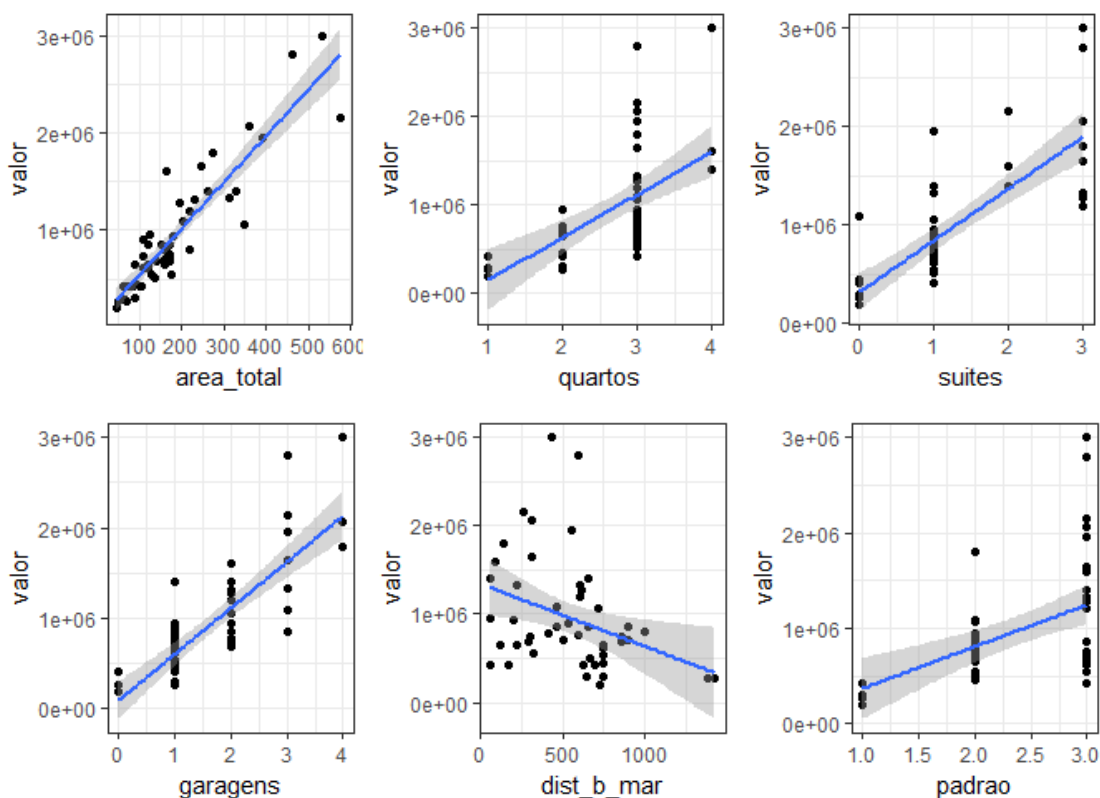


Figura 4 - Variável dependente versus regressores (autoria própria).

Tanto para o método de regressão polinomial quanto para o método das redes neurais artificiais, foi realizado o seguinte procedimento:

1. Para uma determinada porcentagem  $p$ , inicialmente de 20% do número de dados disponíveis  $n$ , foram criadas duas partições, uma partição de treinamento, com  $p \cdot n = 10$  dados e uma partição de testes, com  $(1 - p) \cdot n = 40$  dados, em que os dados das partições são escolhidos randomicamente.
2. Com as partições de treinamento assim obtidas, foram ajustados 100 modelos de regressão polinomial de grau 2, ou de redes neurais artificiais com 1 camada oculta.
3. Com os modelos obtidos no passo anterior, foram realizadas estimativas sobre os dados da partição de testes e foi calculado o RMSE para a partição de testes.
4. Iterativamente aumentou-se, de 2 em 2 pontos percentuais o tamanho da partição de treinamento, calculando-se o valor do RMSE para a partição de teste.
5. Finalmente, comparou-se o comportamento dos valores medianos do RMSE com o aumento do

número de dados da partição de testes para as duas metodologias, assim como a distribuição final do RMSE com a utilização de 90% dos dados na partição de treinamento.

As redes neurais artificiais foram modeladas com o auxílio do pacote neuralnet (FRITSCH, 2016). Para a regressão polinomial, foi adotada a redução dimensional pelo método de análise de componentes principais, já programado internamente no pacote polyreg (MATLOFF et al., 2018).

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nos tópicos seguintes serão apresentados os resultados obtidos ao se realizar a modelagem por regressão polinomial e por redes neurais.

##### 4.1. REDES NEURAIAS ARTIFICIAIS

Na figura 5, pode-se ver o comportamento do RMSE mediano para cada tamanho de partição com a aplicação do modelo de redes neurais, onde se observa que à medida que aumenta o tamanho da partição de treinamento, diminui o valor do RMSE mediano, ainda que com alguma instabilidade. Já na figura 6, mostra-se que a distribuição do RMSE para a partição de treinamento de maior tamanho é relativamente esparsa.

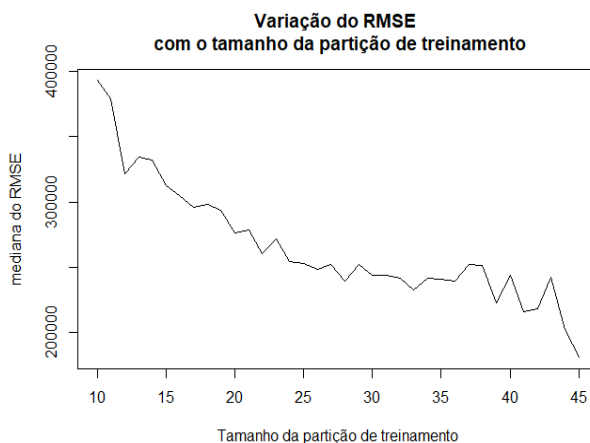


Figura 5 - RMSE mediano com o tamanho da partição de testes (autoria própria).

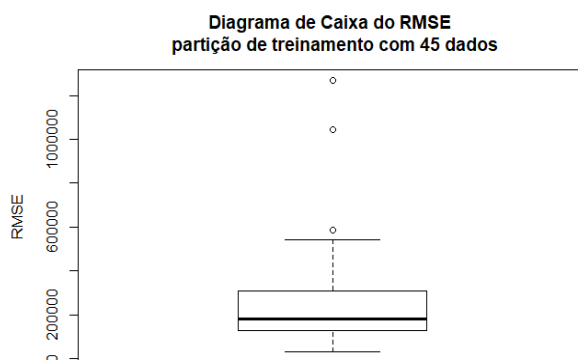


Figura 6 - Distribuição dos valores de RMSE para partição de treinamento (autoria própria).

##### 4.2. REGRESSÃO POLINOMIAL

Na figura 7, pode-se ver o comportamento do RMSE mediano para cada tamanho de partição com a aplicação do modelo de regressão polinomial, onde se observa que à medida que aumenta o tamanho da partição de treinamento, diminui o valor do RMSE mediano, com uma estabilidade muito maior do que a verificada com os modelos de redes neurais artificiais. Já na figura 8, mostra-se que a distribuição do RMSE para a partição de treinamento de maior tamanho é muito mais compacta do que a obtida na modelagem por redes neurais artificiais.



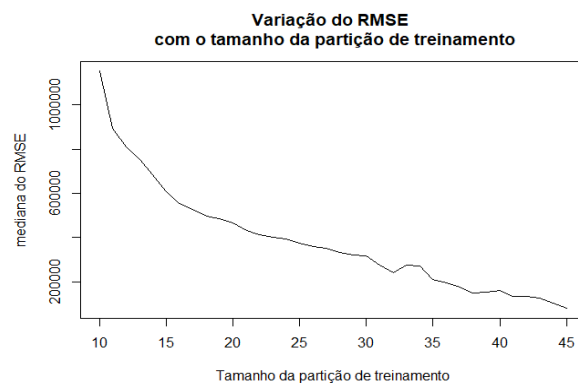


Figura 7 - RMSE mediano com o tamanho da partição de testes (autoria própria).

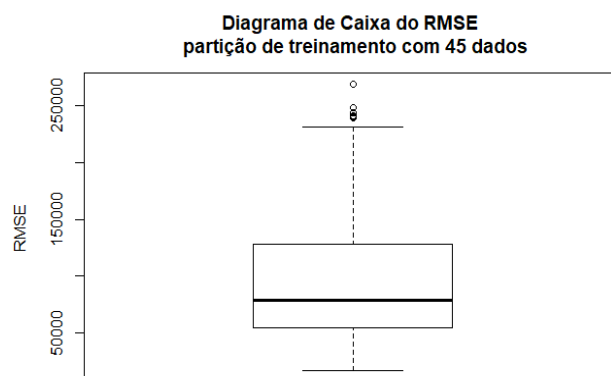


Figura 8 - Distribuição dos valores de RMSE para partição de treinamento (autoria própria).

## 5. CONCLUSÕES

Este estudo teve como objetivo comparar os resultados obtidos ao se tratar dados utilizando regressão polinomial e técnicas de redes neurais artificiais. Verificou-se que os resultados da raiz do erro médio quadrático - RMSE para modelos de regressão polinomial foram menores e com menor dispersão quando comparados com os obtidos por redes neurais artificiais.

Conforme os últimos achados na ciência estatística, e de acordo com os resultados apresentados tanto em Matloff (2018) quanto nesse estudo, pondera-se que sejam despendidos maiores esforços em estudos relacionados à utilização da regressão polinomial na Engenharia de Avaliações, haja vista que, como a regressão polinomial nada mais é do que um caso particular de regressão linear, seu método e aplicação já são plenamente conhecidos e estão estabelecidos e normatizados pela NBR 14.653-02, enquanto as redes neurais ainda apresentam comportamento um tanto desconhecido, apesar de sua excelente performance e resultados.

Além disso, como o desempenho dos modelos de regressão polinomial mostrou-se bastante satisfatório, sugere-se, também, que sejam investidos maiores esforços no estudo das particularidades do respectivo método para uma possível posterior normatização dos seus procedimentos.

## REFERÊNCIAS

ABNT. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14653-2**: Avaliação de Bens. Parte 2: Imóveis Urbanos. Rio de Janeiro, 2011.

BAPTISTELLA, Marisa; CUNICO Luiz Homero Bastos; STEINER, Maria Teresinha Arns. **O uso de redes neurais na engenharia de avaliações**: determinação dos valores venais de imóveis urbanos. Revista Ciências Exatas e Naturais. São Paulo, v. 9, n. 2, jul./dez 2007.

BEALE, R.; JACKSON, T. **Neural computing**: an introduction. Institute of Physics Publishing, 1990.

BRAGA, A. P.; CARVALHO, A. C. P. L. F.; LUDEMIR, T. B. **Redes neurais artificiais**: teoria e aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

FERNEDA, Edberto. **Redes neurais e sua aplicação em sistemas de recuperação de informação**. Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto - USP. jul. 2006.

FIORIN, D. V.; MARTINS, F. R.; SCHUCH, N. J.; PEREIRA, E. B. **Aplicações de redes neurais e previsões de disponibilidade de recursos energéticos solares.** Revista Brasileira Ensino de Física. São Paulo, v. 33, n 11, mar. 2011.

FRITSCH, S.; GUENTHER, F. (2016). **neuralnet: Training of Neural Networks.** R package version 1.33. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=neuralnet>>. Acesso em out. 2018.

GUARNIERI, Ricardo André. **Emprego de redes neurais artificiais e regressão linear múltipla no refinamento das previsões de radiação solar do modelo ETA.** Dissertação (Mestrado em Meteorologia) - Programa de Pós-Graduação em Meteorologia, IMPE, São José dos Campos, 2006.

GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. **Econometria básica.** 5. ed. Porto Alegre: AMGH Bookman, 2011.

HAYKIN, Simon. **Redes neurais: princípios e prática.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HOCHHEIM, Norberto. **Engenharia de avaliações: módulo básico.** Florianópolis: IBAPE - SC, 2015.

MATLOFF, Norman; CHENG, Xi; KHOMTCHOUK, Bohdan; MOHANTY, Pete. **Polynomial regression as an alternative to neural nets.** 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1806.06850>>. Acesso em out. 2018.

PELLI NETO, A. **Redes neurais artificiais aplicadas às avaliações em massa: estudo de caso para a cidade de Belo Horizonte.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFMG, Belo Horizonte, 2006.

SOBREIRO, V. A.; ARAÚJO, P. H. S. L.; NAGANO, M. S. **Precificação do etanol utilizando técnicas de redes neurais artificiais.** Revista de Administração. São Paulo, v. 44, n. 1, p. 46-58, jan./fev./mar. 2009.